Mittel als Mittel zum Zweck
Extremwertaufgaben ohne Differentialrechnung

Gerd Baron, TU-Wien

Die Grundidee und These für die nachfolgende Zusammenstellung ist:

Extremwerte sind durch Ungleichungen definiert:

$f(x) \geq f(x_0)$, $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ etc. Minimum

$f(x) \leq f(x_0)$, $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ etc. Maximum

Daher sind Extremwertaufgaben durch Ungleichungen lösbar.

Als einfachstes Beispiel einer Ungleichung gilt wohl $x^2 \geq 0$ mit „=" genau für $x=0$.
Wir können hier sogar den Fall auszeichnen, für den Gleichheit gilt.
In die Sprache der Extremwertaufgaben übersetzt heißt dies:

Das Minimum von $f(x)=x^2$ ist 0 und es wird genau für $x=0$ angenommen.

Etwas allgemeiner sogar:
Für $f(x)=a+x^2$ ist das Minimum a und wird genau für $x=0$ angenommen, bzw.
Für $f(x)=a-x^2$ ist das Maximum a und wird genau für $x=0$ angenommen.
Oft sind aber erst Umformungen der vorgegebenen Funktion notwendig, um sie in diese einfache Gestalt zu bringen, aus der wir das Extremum leicht ablesen können.

<u>Beispiel 1:</u> Als Beispiel diene aus SCHELLBACH das Beispiel 5 resp. 40.
Von welcher Höhe x muß eine vollkommen elastische Kugel herabfallen, damit sie in kürzester Zeit zurückspringend die Höhe h wieder erreicht?

Lösung:
$x=g\,t_1^2/2 \quad t_1=\sqrt{(2/g)}\sqrt{x}$
$x-h=g\,t_2^2/2 \quad t_2=\sqrt{(2/g)}\sqrt{(x-h)}$
Die Fallzeit ist also t_1 und die Rücksprungzeit ist t_1-t_2, also muß $t=t_1+(t_1-t_2)=2t_1-t_2$ minimal werden.
Auf den konstanten positiven Faktor $\sqrt{(2/g)}$ verzichtend, haben wir $f(x)=2\sqrt{x}-\sqrt{(x-h)}$ auf ein Minimum zu untersuchen. Da uns nur positive Werte von f(x) interessieren, können wir auch $g(x)=f(x)^2=4x+(x-h)-2.2\sqrt{x}\sqrt{(x-h)}$ untersuchen.
Den Ausdruck $(\sqrt{x}-2\sqrt{(x-h)})^2=x+4(x-h)-2.2\sqrt{x}\sqrt{(x-h)}$ ausnützend, können wir wesentlich schöner $g(x)=3h+(\sqrt{x}-2\sqrt{(x-h)})^2$ schreiben.
Wir erhalten also das Minimum von g(x) und damit auch von f(x) und somit von der Zeit t für $\sqrt{x}-2\sqrt{(x-h)}=0$, also für $x=4(x-h)$, d.h. für $x=4h/3$. Die gesamte Zeit ist dann $\sqrt{(2/g)}\sqrt{(3h)}=\sqrt{(6h/g)}$.

Algemeiner können wir die bisher verwendete Ungleichung $x^2 \geq 0$ mit „=" genau für $x=0$ auch noch in der Form $x^2+y^2 \geq 0$ mit „=" genau für $x=0$ und $y=0$ betrachten und verwenden. Sie liefert dann ein freies Extremum (Minimum) der Funktion $f(x,y)=x^2+y^2$ genau für $x=0$, $y=0$. Eine Aufgabe, die mit den Mitteln der Differentialrechnung für Funktionen mit einer Veränderlichen eigentlich nicht gelöst werden kann.

Mit unserer Grundidee können wir sogar Extrema mit Nebenbedingungen behandeln:

Extrema für $f(x,y)$ mit der NB $g(x,y)=c$.

Gilt $f(x,y) \leq g(x,y)$ mit „=" falls die Beziehung $h(x,y)=0$ gilt, und hat das Gleichungssystem $h(x,y)=0$ und $g(x,y)=c$ eine Lösung, so folgt:
Das Maximum von $f(x,y)$ ist c und es wird für $x=x_0$, $y=y_0$ angenommen, wobei man x_0, y_0 aus dem Gleichungssystem $h(x_0,y_0)=0$ und $g(x_0,y_0)=c$ zu ermitteln hat.
Die dazugehörige Minimumsaufgabe für $g(x,y)$ mit der NB $f(x,y)=d$ liest sich dann wie folgt:
Das Minimum von $g(x,y)$ ist d und es wird für $x=x_0$, $y=y_0$ angenommen, wobei man x_0, y_0 aus dem Gleichungssystem $h(x_0,y_0)=0$ und $f(x_0,y_0)=d$ zu ermitteln hat.

Wo bekommen wir nun solche Ungleichungen her?

Zum Beispiel von oben. Damit ist hier nicht der Himmel gemeint, sondern die schon weiter oben in der bisherigen Betrachtung verwendete triviale Ungleichung $x^2 \geq 0$ mit „=" genau für $x=0$.
Es folgt aus ihr $0 \leq (x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$. Addieren wir auf beiden Seiten 4xy und dividieren wir noch durch 4, so erhalten wir $xy \leq [(x+y)/2]^2$. Schränken wir uns freiwillig auf positive x und y ein $(x>0, y>0)$ so erhalten wir
$\sqrt{(xy)} \leq (x+y)/2$ mit „=" genau für $x=y$.
Die in dieser Ungleichung auftretenden Funktionen sind aber bekannte Funktionen.
$\sqrt{(ab)}$ ist das geometrische Mittel von a und b und $(a+b)/2$ ist das arithmetische Mittel von a und b.
Wir erhalten also: Von zwei positiven Zahlen a und b ist das geometrische Mittel stets kleiner gleich dem arithmetischen Mittel mit Gleichheit genau für $a=b$.

Wenden wir die Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel gleich auf einige Beiscpiele an.

Beispiel 2: Gesucht ist ein Rechteck mit gegebenem Umfang und maximalem Flächeninhalt.

Lösung: $2(a+b)=u$ $\quad F=a.b$
Also $\sqrt{F}=\sqrt{(ab)} \leq (a+b)/2 = u/4$ (gegeben).
Also wird das Maximum von F mit $(u/4)^2$ für $a=b$ (Quadrat) erreicht. Das gesuchte Rechteck ist also ein Quadrat (mit der Seitenlänge $u/4$).

Beispiel 3: Ein zweites Beispiel dazu: (Bsp.122 aus LIETZMANN-JAROSCH)
Wir betrachten Quader mit gegebenem Volumen abc und einer gegebenen Seitenlänge a. Gesucht sind jene Quader mit minimaler Oberfläche.

Lösung: O=2(ab+bc+ca99ac)=2a(b+c)+2bc=4a[(b+c)/2]+2V/a.
Aus $(b+c)/2\geq\sqrt{(bc)}=\sqrt{(V/a)}$ mit „=" für $b=c=\sqrt{(V/a)}$ erhalten wir als Lösung das quadratische Prisma.

Beispiel 4: Als letztes Beispiel dazu wollen wir das Beispiel 448 aus REICHEL betrachten.
An einer Mauer soll ein möglichst großes a mal b Rechteck mit einem Zaun vorgegebener Länge a+2b=L abgegrenzt werden.

Die erste Lösung läuft fast standardmäßig, allerdings mit einem kleinen Trick.
F=a.b. Aber (a+b)/2 ist ja nicht konstant, d.h. gegeben, sondern nur (a+2b)/2. Wir schreiben also $F=(a.2b)/2\leq[(a+2b)/2]^2/2=L^2/8$ mit „=" genau für a=2b, also b=a/2. Das gesuchte Rechteck ist also ein halbes Quadrat.

Einen zweiten Lösungsweg erhalten wir durch eine **geometrische Überlegung.** Wir spiegeln das Rechteck an der Mauer. Der neue Flächeninhalt ist doppelt so groß wie der alte. Ebensolches gilt für die nun notwendige Zaunlänge, diese ist aber jetzt der Umfang. Wir haben also das Problem auf ein schon gelöstes, nämlich Rechteck mit gegebenem Umfang und maximalem Flächeninhalt, zurückgeführt. Damals erhielten wir das Quadrat als Lösung, also erhalten wir jetzt das halbe Quadrat.

Außer geometrischem (gM) und arithmetischem (aM) Mittel ist vielleicht manchen auch noch das harmonische Mittel hM=2ab/(a+b) bekannt. Wie man sofort einsieht gilt $hM.aM=(gM)^2$. D.h. gM(hM,aM)=gM. Daraus folgt aber wegen $aM\leq gM$ sofort auch $hM\leq gM$.

Übrigens geben diese Mittel ihre Namen auch für die entsprechend benannten Folgen und Reihen her. Bei den arithmetischen resp. geometrischen Folgen und Reihen ist jedes Glied das entsprechende Mittel der beiden Nachbarglieder. Analog kann man harmonische Folgen und Reihen definieren. Den meisten ist allerdings nur „die" harmonische Reihe $\sum 1/n$ bekannt.

Weniger bekannt ist das quadratische Mittel $qM=\sqrt{[(a^2+b^2)/2]}$.
Aus $qM^2-aM^2=(a^2+b^2)/2-(a^2+2ab+b^2)/4=(a^2-2ab+b^2)/4=[(a-b)/2]^2\geq 0$ folgt sofort $aM\leq qM$.

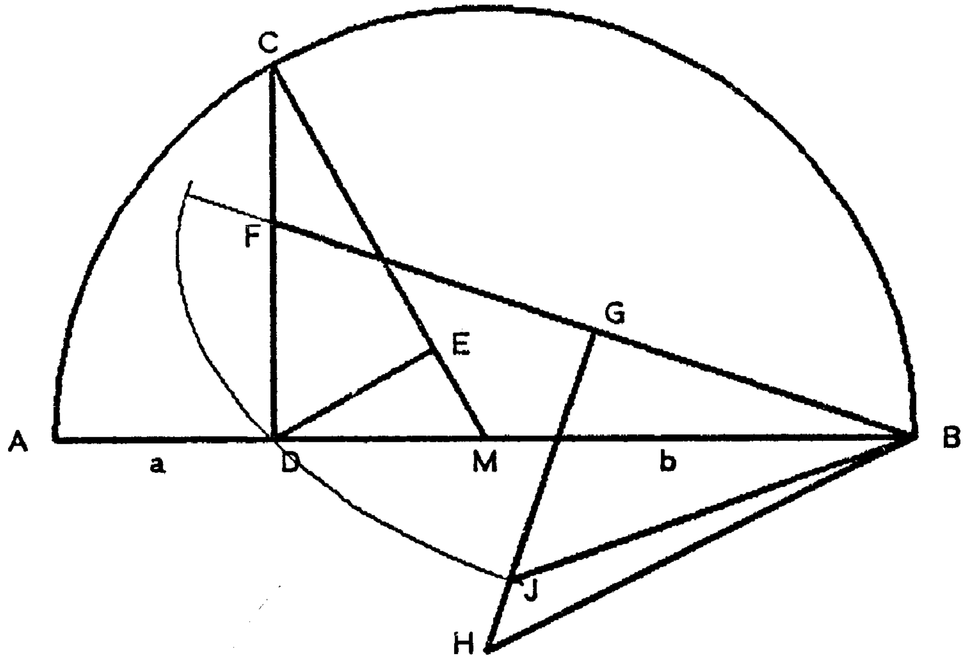
Rechnen wir auch damit ein Beispiel.
Beispiel 5: Rechteck mit gegebenem Umfang und kürzester Diagonale gesucht.

Lösung: 2(a+b)=u $d=\sqrt{(a^2+b^2)}=\sqrt{2}\sqrt{[(a^2+b^2)/2]}$.
$u/4=(a+b)/2\leq\sqrt{[(a^2+b^2)/2]}=d/\sqrt{2}$ mit „=" genau für a=b (Quadrat).

Geometrische Veranschaulichung der Mittel

Eine geometrische Veranschaulichung der Mittel und der Mittelungleichungen kann in zwei Modellen durchgeführt werden.

Erstens das **Kreismodell.**



Wir legen die zwei Strecken a=AD und b=DB auf einer Geraden neben einander. Es sei M der Mittelpunkt von AB und somit auch des Halbkreises über AB mit dem Radius $r=(a+b)/2$. Sei C der Punkt dieses Halbkreises über dem Punkt D.

Es gilt dann $MC=r=(a+b)/2=aM$

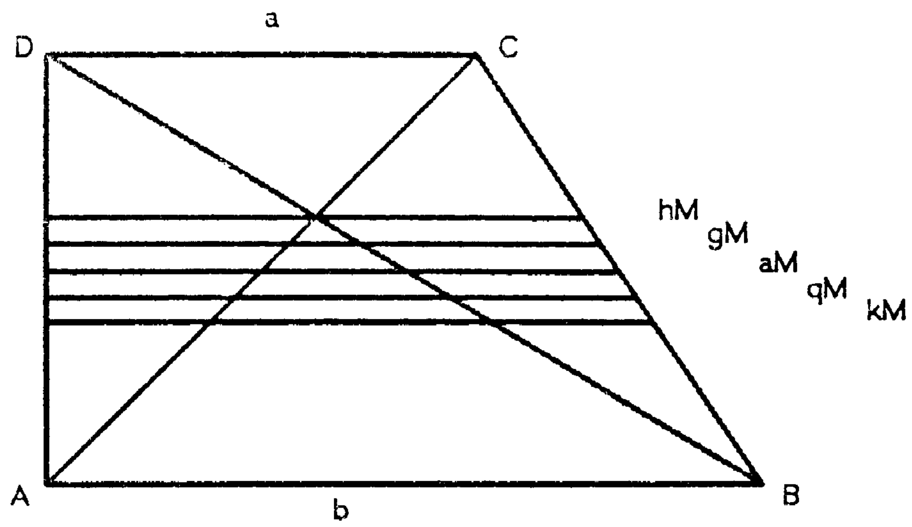
Und nach dem Höhensatz $CD=\sqrt{(ab)}=gM$.

Es folgt sofort $gM\leq aM$.

Sei nun E der Höhenfußpunkt von D im Dreieck CDM. So gilt nach dem Kathetensatz $CE.CM=CD^2$, also $CE.aM=gM^2$. Somit ist $CE=hM\leq gM$.

Auch das quadratische Mittel läßt sich hier darstellen. Es sei o.B.d.A. $a<b$. Gehen wir von D nach C zu F, sodaß DF=a. Es sei G der Mittelpunkt von BF. Errichten wir über BF ein gleichschenkelig rechtwinkeliges Dreieck BHF, so ist $DG=GF=GB=HG$ und $BH=FH=qM$. D liegt dann auf einer Ellipse mit den Brennpunkten F und B und der Länge der Hauptachse gleich a+b. Ihr Nebenscheitel sei J. Es gilt dann $GJ\leq GD=GH$, also auch $aM=BJ\leq BH=qM$.

Als zweites Modell möchte ich das **Trapezmodell** vorstellen. Hier seien a und b die Längen der beiden Parallelseiten. a oben, b unten, $a \leq b$.



Der Diagonalenschnittpunkt teilt die Höhe in zwei Abschnitte h_1 oben und h_2 unten. Weiters entstehen zwei ähnliche Dreiecke mit den Höhen h_1 resp. h_2 und den Basen a resp. b. Es gilt daher $h_1:h_2=a:b$. Die Länge der Horizontalen durch den Diagonalenschnittpunkt sei x. Verschieben wir die linke Seite parallel jeweils durch die rechten oberen Ecken der beiden Teiltrapeze, so erhalten wir rechts zwei ähnliche Dreiecke mit den Höhen h_1 resp. h_2 und den Basen x−a resp. b−x.

Es gilt daher $(x-a):(b-x)=h_1:h_2=a:b$, also $x=2ab/(a+b)=hM$. Diese Proportion ist übrigens die alte Definition des harmonischen Mittels.

Weiters gilt in diesem Modell, daß die Parallele zur Grundlinie, die das Trapez in ähnliche Teiltrapeze zerlegt, als Länge das geometrische Mittel hat.

In dem selben Sinne halbiert das arithmetische Mittel die Höhe des Trapezes. Es liegt also tiefer als das geometrische Mittel. Daraus folgt sofort $gM \leq aM$.

Für das arithmetische Mittel gilt, daß die Länge der neuen Parallelseite das arithmetische Mittel der Längen der alten ist.

Für das quadratische Mittel gilt, daß der Flächeninhalt des Kreises über der neuen Parallelseite das arithmetische Mittel der Flächeninhalte der Kreise über den alten ist.

Für das kubische Mittel gilt, daß das Volumen der Kugel über der neuen Parallelseite das arithmetische Mittel der Volumina der Kugeln über den alten ist.

Bei gleichschenkeligen Trapezen erzeugt das kubische Mittel zwei Teiltrapeze, die bei Rotation um die Symmetrieachse Kegelstümpfe mit gleichen Volumina ergeben.

Das quadratische Mittel zerlegt das Trapez in zwei flächengleiche Teiltrapeze.

Es folgt sofort $aM \leq qM \leq kM = \sqrt[3]{[(a^3+b^3)/2]}$.

Die letzten beiden Mittel können wir natürlich als Potenzen mit gebrochenen Exponenten statt als Wurzelausdrücke schreiben. Wir erhalten dann $qM=[(a^2+b^2)/2]^{1/2}$ und $kM=[(a^3+b^3)/2]^{1/3}$.
Dies läßt sich sofort durch $m_p=[(a^p+b^p)/2]^{1/p}$ zu einem p-ten **Potenzmittel** (für $p\neq 0$) verallgemeinern. Wir erhalten dann $m_1=aM$, $m_2=qM$ und $m_3=kM$ sowie $m_{-1}=hM$. Für p=0 definieren wir $m_0=\sqrt{(ab)}=gM$.
Die bisherigen Mittelungleichungen lesen sich nun in der Kette $m_{-1}\leq m_0\leq m_1\leq m_2\leq m_3$.
Die **allgemeine Mittelungleichung** lautet nun:
Für $p<q$ gilt $m_p\leq m_q$ mit „=" genau für a=b.
Dies gilt sogar für $p=-\infty$ und/oder $q=+\infty$ mit $m_{-\infty}=\min(a,b)$ und $m_{+\infty}=\max(a,b)$.

Betrachten wir ein weiteres Beispiel.

Beispiel 6: Gesucht ein quadratisches Prisma mit gegebener Oberfläche und maximalem Volumen.

Lösungsversuch: $O=2(a^2+2ah)$ gegeben. $V=a^2h$. Gleicher Trick wie bei Rechteck an der Mauer. $a^2.2ah=2a^3h$ erweist sich als unbrauchbar.
Man müßte so etwas wie $a^2.ah.ah=a^4h^2=V^2$ erhalten. Dann benötigen wir aber drei Faktoren. Oder wir fassen den Faktor 2 als eine Art Gewicht auf.

Weitere Verallgemeinerung des Mittels. Nun als **gewichtetes Potenzmittel:**
Die Gewichte seien $\alpha,\beta>0$: $m_p(a,b;\alpha,\beta)=[(\alpha a^p+\beta b^p)/(\alpha+\beta)]^{1/p}$ für $p\neq 0$ und $m_0(a,b;\alpha,\beta)=\sqrt[\alpha+\beta]{(a^\alpha b^\beta)}$.
Eine Bemerkung ist wichtig: Es kommt nur auf $\alpha:\beta$ an, man könnte also $\alpha+\beta=1$ voraussetzen.
Bei festen Gewichten α,β gilt wieder die **allgemeine Mittelungleichung:**
Für $p<q$ gilt $m_p(a,b;\alpha,\beta)\leq m_q(a,b;\alpha,\beta)$ mit „=" genau für a=b.

Lösung des obigen Beispiels 6:
$\alpha=1$, $\beta=2$. $m_0=\sqrt[3]{[a^2(ah)^2]}\leq m_1=(a^2+2\,ah)/3$. $m_0=\sqrt[3]{(a^4h^2)}=\sqrt[3]{V^2}$.
Maximum von V für „=", d.h. $a^2=ah$, also für a=h, dem Würfel.

Die oben aufgetretenen ganzzahligen Gewichte $\alpha=1$ und $\beta=2$ können wir auch als Anzahlen interpretieren. Wir haben dann 3 Zahlen a^2 , ah , ah.

Wir können nun auf n Argumente $a_1,a_2,\ldots,a_n$ verallgemeinern.
Beim Ausdruck $m_1=(\sum a_i)/n$ lacht jedem Statistikfetischisten das Herz. (Es ist wert, sich diesen Anblick plastisch vorzustellen)
Allgemeiner $m_p=[(\sum a_i^p)/n]^{1/p}$ und $m_0=\sqrt[n]{\prod a_i}$.
Auch hier gilt eine **allgemeine Mittelungleichung:**
Für $p<q$ gilt $m_p\leq m_q$ mit „=" genau für $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Aus den Schularbeitstatistiken (und für die mit dem Statistiktick als semantisches Differential bekannt) kennen wir das gewichtete arithmetische Mittel:

Mit den Gewichten g_i und dem Gesamtgewicht $\sum g_i=G$ gilt ja $m_1=(\sum g_i a_i)/G$.

Allgemeiner $m_p=[(\sum g_i a_i{}^p)/G]^{1/p}$ für $p\neq 0$ und $m_0=\sqrt[G]{\prod a_i{}^{g_i}}$.

Auch hier gilt bei festen Gewichten g_i eine allgemeine Mittelungleichung:

Für $p<q$ gilt $m_p\leq m_q$ mit „=" genau für $a_1=a_2=...=a_n$.

Jetzt können wir das obige Beispiel 6 mit den Gewichten 1 aber mit 3 Zahlen behandeln: $\sqrt[3]{(a^2.ah.ah)}\leq(a^2+ah+ah)/3$ mit „=" für $a^2=ah=ah$, also für $a=h$.

Weitere Beispiele.

Beispiel 7 und 8: Wir verwenden Quader mit Volumen $V=abc$, Oberfläche $O=2(ab+bc+ca)$ und Kantensumme $K=4(a+b+c)$.

Lösung: Da wir bei gegebener Oberfläche $ab.bc.ca=(abc)^2=V^2$ und bei gegebener Kantensumme $abc=V$ haben, erhalten wir jeweils maximales Volumen für (O gegeben) $ab=bc=ca$, also $a=b=c$ (ebenso bei gegebener Kantensumme), d.h. für den Würfel.

Bei diesem Beispiel haben wir sogar 3 Veränderliche mit nur einer Nebenbedingung erledigt. Eine Situation, die mit der Mittelschulmathematik eigentlich nicht bewältigbar scheint.

Beispiel 9: REICHEL 469b (Winkelfunktionen)

Gesucht ist eine Rinne mit maximalem trapezförmigem Querschnitt, die aus 3 Brettern mit der Breite a gezimmert werden kann.

Lösung: Das rechtwinkelige Böschungsdreieck hat die Hypotenuse a (gegebene Breite der Bretter) und die Katheten x und h.

Der doppelte Flächeninhalt des Querschnitts ist dann $2F=(a+x)h$ mit $h^2=a^2-x^2$.

Es ist einfacher dessen Quadrat $G=(a+x)^2(a^2-x^2)=(a+x)^3(a-x)$ zu untersuchen.

Wir haben nun 4 Faktoren, aber leider ist ihre Summe $3(a+x)+(a-x)$ nicht konstant.

Allerdings ist $3[(a+x)/3]+(a-x)=2a$ konstant.

Wenn wir nun $G=27[(a+x)/3]^3(a-x)=27m_0{}^4$ schreiben, so können wir die Mittelungleichung anwenden und erhalten das Maximum für $(a+x)/3=a-x$, also für $x=a/2$. D.h. beim maximalen Querschnitt ist das Böschungsdreieck ein halbes gleichseitiges Dreieck, der Böschungswinkel ist daher 60^0.

Beispiel 10: Ein Beispiel, das in sehr sehr vielen Büchern als einführendes Beispiel gebracht wird. Wir wählen die Angaben aus REICHEL 451 „Schachtel".
Gegeben sei ein rechteckiger Karton mit den Maßen 10x16. Durch Herausschneiden von Quadraten in den vier Ecken und Falzen und Heraufbiegen der Randrechtecke soll eine oben offene Schachtel mit maximalem Volumen hergestellt werden.

Lösung: Sei x die Seitenlänge des Quadrats, dann gilt
$V=(10-2x)(16-2x)x=4(5-x)(8-x)x$.
Leider ist die Summe $(5-x)+(8-x)+x$ der 3 Faktoren nicht konstant. (Versuch 1 mißlungen)
Wiederholen wir den Trick von vorhin, daß wir den Faktor x durch 2x „ersetzen", dann ist die Summe $(5-x)+(8-x)+2x=13$ konstant. Aus der Mittelungleichung erhalten wir nun die Bedingungen $5-x=8-x=2x$. Diese sind aber leider nicht lösbar, da niemals $5-x=8-x$ gilt. (Versuch 2 mißlungen. Aufgeben? Nein)
Es sind eben andere Koeffizienten notwendig: $\alpha(5-x)$, $\beta(8-x)$ und γx. Achtung es handelt sich dabei nicht um Gewichte, da sie ja beim Produkt (geometrisches Mittel) nicht als Exponenten auftreten. Es muß $\alpha(5-x)+\beta(8-x)+\gamma x=(5\alpha+8\beta)+(\gamma-\alpha-\beta)x$ konstant sein. Dies ist für $\gamma=\alpha+\beta$ erfüllt.
Wir schreiben daher nun $V=4[\alpha(5-x)][\beta(8-x)][(\alpha+\beta)x]/[\alpha\beta(\alpha+\beta)]$, also das konstante Vielfache des Volumens $[\alpha\beta(\alpha+\beta)]V/4=m_0^3$. Jetzt ist $m_1=[5\alpha+8\beta]/3=m_0$ für $\alpha(5-x)=\beta(8-x)=(\alpha+\beta)x$. Dieses System hat aus der ersten und dritten Gleichung die Lösung $x=5\alpha/(2\alpha+\beta)$ und aus der zweiten und dritten Gleichung die Lösung $x=8\beta/(\alpha+2\beta)$. Diese beiden Werte müssen also übereinstimmen. Es muß also gelten $5\alpha^2+10\alpha\beta=16\alpha\beta+8\beta^2$, d.h. $5\alpha^2-6\alpha\beta-8\beta^2=0$ Woraus sich als positive Lösung $\alpha=2\beta$ ergibt. Für x folgt damit $x=2$.

Bemerkung 1: Klarerweise kommt es bei diesem Trick nur auf das Verhältnis der Koeffizienten an. Wir hätten also von vornherein α oder β oder γ gleich 1 setzen können. Man soll aber gewisse Wahlfreiheiten nicht zu früh aufgeben, da man manchmal später durch eine bessere Wahl komplizierte Rechnungen vereinfachen kann.

Bemerkung 2: BOAS und KLAMKIN haben gezeigt, daß man mit diesem Trick alle Polynomfunktionen behandeln kann.

Beispiel 11, 12 und 13: (KLAMKIN; Problem von OGILVY, dort anders gelöst)
Wir betrachten rechtwinkelige Dreiecke im Achsenkreuz, sodaß $P(h,k)$ auf der Hypotenuse liegt. Für die Katheten a und b haben wir also die Nebenbedingung $h/a+k/b=1$, deren Gestalt an das harmonische Mittel $m_{-1}(a,b)$, allerdings mit Gewichten h und k, erinnert.
Nun können wir für verschiedene „Zielfunktionen" extremale Dreiecke suchen. Wir wollen hier drei auswählen.
1.) Die Summe der Kathetenlängen $a+b=2m_1(a,b)$
2.) Die Länge der Hypotenuse $\sqrt{(a^2+b^2)}=\sqrt{2}\,m_2(a,b)$
3.) Den Umfang des Dreiecks $a+b+\sqrt{(a^2+b^2)}$

Lösung:

In den ersten beiden Problemen haben wir wieder Mittel, allerdings mit den Gewichten 1. Um die Mittelungleichung anwenden zu können, müssen wir nur Gewichte α und β so einführen, daß sie in der Zielfunktion und in der Nebenbedingung gleich sind.

1.) $a+b=\alpha(a/\alpha)+\beta(b/\beta)=(\alpha+\beta)m_1(a/\alpha,b/\beta;\alpha,\beta)$

$m_{-1}(a/\alpha,b/\beta;\alpha,\beta)=\left([\alpha(\alpha/a)+\beta(\beta/b)]/[\alpha+\beta]\right)^{-1}$.

Wählen wir $\alpha^2=h$ und $\beta^2=k$, so geht dieses harmonische Mittel über in

$\left([h/a+k/b]/[\alpha+\beta]\right)^{-1}=\alpha+\beta=\sqrt{h}+\sqrt{k}$.

Das Minimum der Zielfunktion tritt also für $a/\alpha=b/\beta=\alpha+\beta$, also für $a=h+\sqrt{(hk)}=\sqrt{h}(\sqrt{h}+\sqrt{k})$ und $b=k+\sqrt{(hk)}=\sqrt{k}(\sqrt{h}+\sqrt{k})$ auf. Der „Anstieg" der Hypotenuse ist $b/a=\beta/\alpha=\sqrt{(k/h)}$.

2.) $\sqrt{(a^2+b^2)}=\sqrt{[\alpha^2(a/\alpha)^2+\beta^2(b/\beta)^2]}=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}\, m_2(a/\alpha,b/\beta;\alpha^2,\beta^2)$

$m_{-1}(a/\alpha,b/\beta;\alpha^2,\beta^2)=\left([\alpha^2(\alpha/a)+\beta^2(\beta/b)]/[\alpha+\beta]\right)^{-1}$.

Wählen wir $\alpha^3=h$ und $\beta^3=k$, so geht dieses harmonische Mittel über in

$\left([h/a+k/b]/[\alpha^2+\beta^2]\right)^{-1}=\alpha^2+\beta^2=\sqrt[3]{h^2}+\sqrt[3]{k^2}$.

Das Minimum der Zielfunktion tritt also für $a/\alpha=b/\beta=\alpha^2+\beta^2$, also für

$a=h+\sqrt[3]{(hk^2)}=\sqrt[3]{h}(\sqrt[3]{h^2}+\sqrt[3]{k^2})$ und $b=k+\sqrt[3]{(h^2k)}=\sqrt[3]{k}(\sqrt[3]{h^2}+\sqrt[3]{k^2})$ auf.

Der „Anstieg" der Hypotenuse ist $b/a=\beta/\alpha=\sqrt[3]{(k/h)}$.

3.) Leider haben die beiden ersten Zielfunktionen für $h\neq k$ ihre Extrema an verschiedenen Stellen, sonst hätten wir natürlich sofort die Lösung für den minimalen Umfang gefunden.

Dieses dritte Problem können wir aber durch eine „einfache" rein geometrische Überlegung, also auch wieder ohne Verwendung der Differentialrechnung lösen.

Betrachten wir für ein solches rechtwinkeliges Dreieck mit C im Ursprung und den Ecken A und B auf den Koordinatenachsen und P auf der Hypotenuse den Ankreis an die Hypotenuse. Sein Radius sei r, dann ist sein Mittelpunkt M(r,r). Es seien T_1 (auf CA ist x-Achse), T_2 (auf APB) und T_3 (auf CB ist y-Achse) die Berührungspunkte des Ankreises auf den Seiten des Dreiecks (resp. ihren Verlängerungen). Für den Umfang gilt dann $u=AC+BC+AB=AC+BC+AT_2+BT_2=AC+AT_1+BC+BT_3=2r$.

D.h. der Umfang wird minimal, wenn der Ankreis möglichst klein wird. Dieser muß aber eine Tangente durch P erlauben und „oberhalb" dieser Tangente liegen. Sein Minimum wird also dann erreicht, wenn er durch P geht. Damit kann die Lösung konstruiert werden. Um sie rechnerisch in den Griff zu bekommen, setzen wir P in die Kreisgleichung ein und erhalten die Bedingung $(h-r)^2+(k-r)^2=r^2$.

Woraus für r die Gleichung $r^2-2(h+k)r+h^2+k^2=0$ mit der Lösung $r=h+k+\sqrt{(2hk)}$ folgt.

Mit diesem letzten Beispiel haben wir eine neue Goldader an Methoden zur Lösung von Extremwertaufgaben ohne Verwendung der Differentialrechnung angeschnitten, nämlich

rein geometrische Überlegungen.

Beispiel 14: Gegeben eine Gerade g und in einer der durch sie erzeugten Halbebenen zwei Punkte A und B. Gesucht ist ein Punkt X auf g, sodaß AX+XB minimal wird.

Löasung: Spiegeln wir den Anteil XB des Streckenzuges in die andere Halbebene zu XB'. (B' ist also das Spiegelbild von B an g.) Wir sehen sofort, daß AX+XB=AX+XB' minimal wird, wenn X auf der Verbindungsgeraden von A und B' liegt, also ihr Schnittpunkt mit g ist.
Zur Lösung haben wir also das (physikalische) Reflexionsprinzip verwendet, bzw. (je nach Formulierung) als Lösung erkannt.
Damit haben wir die Lösung konstruiert. Die rechnerische Bewältigung der Aufgabe kann nun mit ähnlichen Dreiecken erfolgen.

Dieses Beispiel tritt in den Schulbüchern, wie auch viele andere interessante Beispiele, oft in einer Verkleidung auf, um den einfachen geometrischen Charakter zu verschleiern. Aber vielleicht steckt nur der, auch nicht gar so moderne (wie oft angenommen) „Motivationschub durch Praxisnähe" dahinter.
Eine an sich nette Formulierung unseres Beispiels interpretiert B als Brandstelle und A als Anrainer (oder Feuerwehrhaus) und g als Flußufer. Gefragt wird dann nach der Stelle am Flußufer, an der Wasser aufgenommen werden soll, um damit dann das Feuer bekämpfen zu können. Dabei soll natürlich zwischen Abfahrt und Löschaktion möglichst wenig Zeit vergehen.
Bei LIETZMANN-JAROSCH wurde noch berücksichtigt, daß man mit Wasser dann langsamer unterwegs ist. Um gleiche Geschwindigkeit zu erreichen, wird daher an der Stelle X ein Vorspann angespannt. Bei REICHEL wird dies nicht mehr berücksichtigt.
Nur als Randbemerkung: Bei unterschiedlicher Geschwindigkeit ergibt sich die Lösung (physikalisch) aus dem Brechungsgesetz.

Varianten von dieser geometrischen Überlegung, der kürzesten Verbindung zweier Punkte, wollen wir noch betrachten.

Beispiel 15: Gegeben sind n positive Zahlen $a_1,a_2,\dots,a_n$.
Gesucht sind Zahlen $b_1,b_2,\dots,b_n$, sodaß $\sum b_j=c$ (gegeben) und $\sum\sqrt{(a_j^2+b_j^2)}$ minimal wird.
Lösung: Wir wählen zwei Punkte A_0 und A_n, deren Horizontalabstand (Differenz der Abszissen) gleich $\sum a_j$ ist und deren Vertikalabstand (Differenz der Ordinaten) gleich $c(=\sum b_j)$ ist. Wählen wir nun Punkte A_j mit aufeinanderfolgenden Abszissendifferenzen zwischen A_{j-1} und A_j gleich a_j und entsprechenden Ordinatendifferenzen gleich b_j, so ist $\sum\sqrt{(a_j^2+b_j^2)}$ die Länge des (gebrochenen) Streckenzuges $A_0A_1\dots A_n$. Diese wird minimal, wenn die Zwischenpunkte $A_1,\dots,A_{n-1}$ auf der Verbindungsstrecke A_0A_n liegen. Es folgt also, daß für das Extremum stets $b_j/a_j=c/\sum a_j$ (gleicher Anstieg) ist.

Eine Verkleidung der Situation für $n=2$ ist in den Schulbüchern als „Verbindung ums Eck" vorhanden. Auf jeder von zwei aneinander stoßenden Zimmerwänden ist ein Punkt gegeben. Z.B. auf der einen ein Punkt A in der Höhe 3 und im Abstand 4 zur gemeinsamen Kante (Zimmerecke), und auf der anderen in der Höhe 1 und im Abstand 2. Diese Punkte sollen durch eine möglichst kurze (Strom-) Leitung verbunden werden. Natürlich ist dieses Beispiel in den Büchern REICHEL, BÜRGER-FISCHER-MALLE und KRONBERGER-PESCHEK nicht neu. Alle haben, inklusive Skizze, von ROSENBERG-LUDWIG-WÜHR kopiert. Nur bei KRONFELLNER-PESCHEK wird wenigstens eine Zahl (3 statt 2) verändert. Obwohl gerade bei diesem Beispiel die speziellen Zahlen nicht von wesentlicher Bedeutung sind, und daher gerade hier die Schulbuchautoren, die ja ihre Quellen nicht zitieren, leicht „neue" Beispiele den Schülern und Lehrern zur Verfügung stellen könnten.
Selbstverständlich wird in allen diesen neuen Büchern auf die neuen gesetzlichen Vorschriften der horizontalen und vertikalen Verlegung von Stromleitungen Rücksicht genommen, und daher die kürzeste Leitung mit der gesetzlich vorgeschriebenen Leitung verglichen.
Der Vorwurf, daß zur Gänze abgeschrieben wurde, trifft nicht voll zu. Es wurden die Interpretationen der Punkte A und B (Stromauslaß und Steckdose) zum Teil abgeändert. Besondere Erwähnung verdient in diesem Zusammenhang aber die „vermal(l)edeite Praxisnähe ohne Sinnhinterfragung" (bei ? Richtig geraten). Dort werden nämlich A (Höhe 3 Meter) und B (Höhe 1 Meter) als Schalter bezeichnet. Vielleicht soll dabei aber ein fächerübergreifender Unterricht vorbereitet werden, und eine Beziehung zu Gullivers Reisen von Jonathan Swift hergestellt werden. A und somit die eine Zimmerwand befindet sich in Brobdingnag, dem Land der Riesen, und B und somit die andere Zimmerwand in Lilliput, dem Land der Zwerge (obwohl er denen natürlich zu hoch wäre. Aber wem ist nicht manches zu hoch?). Oder man bezieht sich auf das Kinderbuch „Florians wundersame Reise über die Tapete".

Ein letztes Beispiel wollen wir noch mit der Technik der kürzesten Verbindung behandeln. Es ist die Lösung von FEJER des Problems von FAGNANO.

Beispiel 16: In das spitzwinkelige Dreieck ABC soll ein Dreieck mit minimalem Umfang eingeschrieben werden (d.h. seine Eckpunkte sollen auf den Dreiecksseiten liegen).

Lösung. Sei das eingeschriebene Dreieck XYZ mit X auf AB, Y auf AC und Z auf BC. Halten wir einmal X fest. Wir spiegeln X an AC und erhalten X'. X gespiegelt an BC liefert X". Dann ist der Umfang des Dreiecks XYZ gleich X'Y+YZ+ZX", wird also minimal, falls Y und Z die Schnittpunkte von X'X" mit den Seiten AC und BC sind. Da das gleichschenkelige Dreieck X'CX" mit CX'=CX"=CX für jede Wahl von X den konstanten Winkel $\sphericalangle$X'CX"=2$\sphericalangle$ACB<180^0 hat, ist X'X" minimal, falls CX minimal ist. Dann ist aber X der Höhenfußpunkt von h_c auf AB. Analoges gilt für Y und Z.
Somit ist das umfangkleinste eingeschriebene Dreieck das Höhenfußpunktdreieck.

Abschließend noch einige subjektiv gefärbte Bemerkungen zur Verwendbarkeit dieses Stoffes, dieser Methoden im Unterricht und aßerhalb des Unterrichts.

Zunächst zu der fast immer als erste gestellten Frage:

Wo bekommt man Beispiele dafür her?

Es wurde ja versucht, die behandelten Beispiele in den Schulbüchern zu orten. Wobei halt in vielen Fällen das Buch von REICHEL et al. herangezogen wurde. In der Literaturliste sind auch noch einige andere Schulbücher zitiert. Leider wird dadurch, wie schon oben an einem Beispiel erwähnt, die Anzahl der zur Verfügung stehenden Beispiele nicht nennenswert größer, da fast alle Schulbuchautoren dieselben Quellen be- und ausnützen. Trotzdem ist selbst diese Menge an Beispielen sehr groß.

Auch das erste Beispiel der Reifeprüfung von Herrmann Weyl (einem Parallelogramm ist das flächenkleinste Dreieck zu umschreiben) kann mit der Mittelungleichung behandelt werden.

Eine weitere fast unerschöpfliche Quelle für solche Beispiele ist das Buch von POLYA. Aber auch in den anderen in der Literaturliste angeführten Büchern sind viele Beispiele enthalten. Das Buch von CLAUS enthält viele, mitunter sehr komplizierte Aufgaben, die mit rein geometrischen Überlegungen gelöst werden können.

Es ist nicht zu erwarten und auch nicht zu vertreten, daß diese Methoden die Anwendung der Differentialrechnung auf Extremwertaufgaben im Schulunterricht verdrängen soll. Im Gegenteil. Mit der Differentialrechnung steht ein fast immer funktionierender Apparat zur Verfügung. Während hier ein Werkzeug präsentiert wurde, das bei jeder neuen Aufgabe frisch eingestellt, ja vielleicht sogar vollkommen umgebaut werden muß. Trotzdem kann ich mir drei **Anwendungsgebiete** vorstellen.

Erstens, kann in manchen Fällen entweder eine einfache Mittelungleichung und/oder eine rein geometrische Überlegung zur Lösung einer Extremwertaufgabe der Differentialrechnung zur Seite gestellt werden. Dies wird bezüglich geometrischer Überlegungen, wie zum Beispiel mit der kürzesten Verbindung beim „Stromleitungsbeispiel" und zusammenm mit der Spiegelung an der Geraden beim „Feuer und Flußbeispiel", allerdings nur in manchen Schulbüchern, schon getan.

Zweitens, kann man auf diese Methoden vielleicht im Wahlfachunterricht, aber sicher in Olympiadevorbereitungskursen eingehen. Allein für die Ungleichung vom geonmetrischen und arithmetischen Mittel offeriert das Buch von BULLEN-MITRINOVIC-VASIC 52 (in Worten: zweiundfünfzig) Beweise. Und in der mathematischen Literatur tauchen immer noch neue auf. Viele davon sind durchaus dem Schüler auch im Selbststudium zugänglich. Und damit komme ich schon zur dritten und vielleicht gangbarsten Anwendung. Wie wäre es mit Facharbeiten über dieses Thema. Mögliche Titel wären.

Potenzmittel und ihre Ungleichungen.

Mittel und ihre geometrische Interpretation.

Elementare Lösung von Extremwertaufgaben.

Geometrische Lösung von Extremwertaufgaben.

Als Literatur und Aufgabensammlung für die beiden zuletzt genannten Themen kann das Schulbuch hergenommen werden. Es kann versucht werden so viele Beispiele wie irgend möglich ohne Differentialrechnung zu lösen.

Ja man kann dies sogar als viertes Anwendungsgebiet schon vor Einführung der Differentialrechnung als Freizeitbeschäftigung für unterforderte Schüler in den unteren Klassen der Oberstufe durchführen. Es ist sicher, daß er eine oder andere dadurch ohne Plotten der Funktionen auf dem Computer ein besseres Verständnis für die Funktionen im allgemeinen und für ihre geometrische Bedeutung im besonderen erwirbt.

Literaturverzeichnis

BOAS Ralph P., Jr. - KLAMKIN Murray S.: Extrema of Polynomials. Math. Mag. 50(1977)75-78.

BULLEN P.S. - MITRINOVIC D.S. -VASIC P.M. Means and Their Inequalities. Reidel Publishing Comp.Dordrecht, Holland. 1988.

BÜRGER-FISCHER-MALLE: Mathematik Oberstufe 3. Hölder-Pichler-Tempsky.

BUTCHART J. H. - MOSER Leo: No Calculus, Please. Scripta Math. 18(1952)221-236.

CLAUS Heinz Jörg: Extremwertaufgaben. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt. 1992.

COFMAN Judita: What to Solve? Clarendon Press , Oxford. 1990.

FLETCHER T. J.: Doing without Calculus. Math. Gaz. 55(1971)4-17

KLAMKIN Murray S.: On Two Classes of Extremum Problems without Calculus. Math. Mag. 65(1992)113-117.

KÖRPERTH-VOHLA: Lehrbuch der Mathematik, 3. Band. Hölder-Pichler-Tempsky. 1976.

KRONFELLNER-PESCHEK: Angewandte Mathematik 3. Hölder-Pichler-Tempsky. 1991.

NAGASE Goro: Using the Discriminant for Problems Involving Extrema. Mathematics Teacher 79(1986)145-146.

NIVEN Ivan: Maxima and Minima without Calculus. Dolciani Math. Expos. No. 6. The Math. Assoc. of America. 1981

POLYA George: Mathematik und plausibles Schließen. 2 Bände. Birkhäuser Verlag, Bd.1 3.Aufl. 1988, Bd.2 2.Aufl. 1975

REICHEL-MÜLLER-HANISCH-LAUB: Lehrbuch der Mathematik 7. Hölder-Pichler-Tempsky.

Reifeprüfung 1904: Mathematische Arbeit von Hermann Weyl. Math.-Nat.wiss. Unterricht 39(1986)451-456.

ROSENBERG-LUDWIG-WÜHR Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Geometrie für die 7. und 8. Klasse. Hölder-Pichler-Tempsky. 1974

SCHELLBACH K. H.: Mathematische Lehrstunden. Verlag Georg Reimer, Berlin. 1860.

TIKHOMIROV V.M.: Stories about Maxima and Minima. Math. World Vol. 1. Amer. Math. Soc., Math. Assoc. of America. 1990